Ciągi liczbowe.

(Powtórzenie do matury część IV)

Zagadnienia do powtórzenia :
- ***-definicja ciągu, wzór ogólny i rekurencyjny,***
- ***-monotoniczność ciągu, granice ciągów,***
- ***-ciągi arytmetyczne i geometryczne oraz ich własności,***
- ***-szereg geometryczny zbieżny i jego suma,***
- ***-zastosowanie szeregu geometrycznego w równaniach, nierównościach i funkcjach,***

Przykładowe zadania powtórzeniowe.

Zad.1. Oblicz po pięć początkowych wyrazów ciągu danego wzorem:

a) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$, b) $b_n = \frac{4n}{2^{n-1}}$, c) $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_{n+1} = 2c_n - 4 \end{cases}$, d) $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \\ d_{n+2} = d_{n+1} + d_n \end{cases}$.

Zad.2. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{n^3 - 4n^2 - 9n + 36}{n^2 + 4n}$ są równe zeru ?

Zad.3. Które wyrazy ciągu $b_n = 10 + 9n - n^2$ są liczbami dodatnimi ?

Zad.4. Zbadaj monotoniczność ciągu :

a) $a_n = \frac{3n}{2n+1}$, b) $b_n = 5 \cdot 3^n$, c) $c_n = 2n^2 - 10n$, d) $d_n = \frac{7}{2^{n+1}}$, e) $e_n = \frac{(n+1)!}{(n+3)n!}$, f) $f_n = \frac{1+2+...+n}{n^2} - \frac{n-1}{n}$.

Zad.5. Wyznacz liczby x, y tak, aby ciąg $(2, x, y)$ był geometryczny, a ciąg $(x, y, 30)$ arytmetyczny.

Zad.6. Wykaż, że ciąg dany wzorem $a_n = 7 - 4n$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zad.7. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg $(n + a_n)$ jest też arytmetyczny.

Zad.8. W ciągu arytmetycznym (a_n): $a_2 + a_4 = 3$ i $a_1 \cdot a_3 = 1$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Zad.9. Oblizc sumę 15 początkowych wyrazów ciągu danego wzorem $a_n = 4n - 1$.

Zad.10. Oblicz sumę wyrazów od jedenastego do dwudziestego szóstego (włącznie) ciągu arytmetycznego (a_n) w którym $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2\sqrt{2}$.

Zad.11. Ile wyrazów ciągu arytmetycznego $(1,5,9,13,...)$ daje w sumie 780 ?

Zad.12. Ciąg arytmetyczny składa się z $n+5$ wyrazów. Wiadomo, że suma n początkowych wyrazów $S_n = 42$, suma następnych trzech wyrazów równa jest –33, a suma dwóch ostatnich to –42. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

Zad.13. Dla jakich wartości $x \in \langle 0; \pi \rangle$ następujące liczby $tgx, 2\sin 2x, ctgx$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny?

Zad.14. Liczby : $\log_2(x-6), \log_2 2x, \log_2(x^2 + 8x)$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zad.15. Obwód trójkąta prostokątnego równy jest 60 cm ,a długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź długości boków i pole trójkąta.

Zad.16. Wyznacz wzór ogólny ciągu , w którym suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem :

a) $S_n = 2n^2 - 3n$, b) $S_n = \frac{3n^2}{n+1}$.

Zad.17. Zbadaj, czy ciąg określony wzorem $a_n = \frac{2}{7} \cdot 3^{2n+1}$ jest geometryczny.

Zad.18. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego, w którym $a_2 = 2{,}1$ oraz $a_5 = -1{,}0752$.

Zad.19. Sprawdź, czy ciąg $(3\sqrt{3} - 5, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1)$ jest geometryczny.

Zad.20. Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_3 = -3, a_5 = -12$.

Zad.21. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie q=3 , w którym suma pięciu początkowych wyrazów równa jest 363.

Zad.22. Ciąg geometryczny ma parzystą liczbę wyrazów. Suma wyrazów o wskaźnikach parzystych wynosi 12 , a suma wyrazów o wskaźnikach nieparzystych 24. Jaki jest iloraz tego ciągu ?

Zad.22. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Ich suma równa jest 42. Jeśli największą z tych liczb zmniejszymy o 6 , a pozostałych nie zmienimy, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Zad.23. Wyrazy ciągu geometrycznego spełniają warunki: suma wyrazów pierwszego i piątego równa jest 51, a suma wyrazów drugiego i szóstego równa jest 102. Ile początkowych wyrazów tego ciągu daje w sumie 3069 ?

Zad.24. Dla jakich wartości x liczby : $\frac{1}{6}\sin x, \cos x, tgx$, wzięte w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny ?

Zad.25. Liczba a jest pierwiastkiem równania $\log_{2a} 8a^3 = (a^2-1)(2a-3)$, zaś b wartością wyrażenia $-6\sqrt{3}(\cos 150^0 - \sin 120^0)$. Wyznacz x i y tak, aby ciąg (a, x, b) był ciągiem geometrycznym, natomiast ciąg (x, y, b) -ciągiem arytmetycznym.

Zad.26. Dla jakich wartości x dany szereg geometryczny jest zbieżny:

a) $\frac{2x}{x+3} + \left(\frac{2x}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x+3}\right)^3 + ...$,

b) $\log_3 x + (\log_3 x)^2 + (\log_3 x)^3 + ...$,

c) $\cos x + 2\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos x + ...$.

Zad.27. Zamień ułamki okresowe na ułamki zwykłe:

a) $2,3(69)$, b) $0,00(123)$, c) $4,(54)$, d) $-9,87(6)$.

Zad.28. Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego równa jest $\frac{8}{3}$. Suma trzech pierwszych wyrazów tego ciągu równa jest 3. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Dla jakiej wartości n spełniona jest równość $S - S_n = \frac{1}{24}$.

Zad.29. W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma wyrazów równa jest 32, a suma logarytmów przy podstawie dwa trzech jego początkowych wyrazów równa jest 18. Wyznacz ten ciąg.

Zad.30. Jaką liczbą jest q, jeśli suma szeregu geometrycznego $q^2 + q^3 + q^4 + ...$ jest liczbą mniejszą od 0,5 ?

Zad.31. Rozwiąż równania :

a) $\log x + \log^2 x + \log^3 x + ... = 1$,

b) $1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + ... = 2$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

c) $1 + tgx + tg^2 x + ... = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$, gdzie $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

d) $\frac{3}{1+x} + \frac{3}{(1+x)^2} + \frac{3}{(1+x)^3} + ... = x - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n-3}{2+4+6+...+2n}$.

Zad.32. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{2x-9}{x} + \frac{(2x-9)^2}{x^2} + \frac{(2x-9)^3}{x^3} + ... < \frac{x-8}{8}$,

b) $\log_8 x + (\log_8 x)^2 + (\log_8 x)^3 + ... \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{n^4+1}}$,

Zad.33. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ wiedząc, że jego pierwszy wyraz jest rozwiązaniem równania $\binom{n+3}{2} = 15$.

Zad.34. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+3n^3+2n^4}{4n^4+n^2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\cdot 10^{n+1} - 2\cdot 3^n}{3^n + 10^{n+2}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{4n+3}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3}+2}{\sqrt{4n-1}}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-5})$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n+4} - 3n)$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(0,1+0,01+...+10^{-n})}{2-3n^2}$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}+2)^{15} + (\sqrt{n}+7)^{15}}{(\sqrt{n})^{15} - 3}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot...\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\right)$,

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$ wskazówka $\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

Zad.35. a) Dla jakiej wartości parametru k granica ciągu $a_n = \frac{(k+4)n^2 - n}{4-3n^2}$ jest równa 2 ?

b) Dla jakiej wartości parametru k ciąg $a_n = \frac{kn^2-3}{(k-1)n^2+n}$ jest rozbieżny do $+\infty$?

c) Dla jakiej wartości parametru k ciąg $a_n = \frac{(2k-2)n^3 - 3n}{kn^2+1}$ jest rozbieżny do $-\infty$?

Zad.36. Wykaż,że jeśli liczby dodatnie $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby $\log a_1, \log a_2, \log a_3, ... \log a_n$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zad.37. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o objętości 27 i przekątnej długości $\sqrt{91}$ wiedząc, że długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny.

Zad.38. Oblicz sumę :

a) $1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{n}$,

b) $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+...100\cdot 2^{99}$.

Zad.39. Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego równa jest 2 , a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu Również równa jest 2 . Wyznacz wzór ogólny takiego ciągu.

Zadania testowe.

Zad.40. Suma n pierwszych wyrazów ciągu c_n wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 + 2n$ dla n=1,2,3,.... Wówczas

a) $c_n = 6n - 1$, b) $2c_{n+1} = c_n + c_{n+2}$, c) ciąg c_n nie jest geometryczny.

Zad.41 . Pola powierzchni całkowitej czworościanów foremnych stanowią ciąg geometryczny o ilorazie 64. Wówczas

a) ich wysokości tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 32,
b) ich objętości tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 512,
c) bryły te są podobne.

Zad.42 . Ciąg (b_n) jest geometryczny. Wówczas

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{b_n}$ jest zbieżny, jeżeli $b_2 < b_1$,
b) $\lim_{n\to\infty} 2^{b_n} = 0$, jeżeli $b_3 < b_2$,
c) ciąg $b_n + b_{n+1}$ jest arytmetyczny.

Zad.43 . Siódmy wyraz i różnica nieskończonego ciągu arytmetycznego są niezerowymi liczbami całkowitymi. Czy wszystkie wyrazy tego ciągu mogą być równocześnie liczbami:

a) parzystymi, b) nieparzystymi, c) ujemnymi.

Zad.44 . Ciągi (a_n) i (b_n) określone są wzorami $a_n = 2002\cdot 4^n + 21^{21}\cdot 3^n, b_n = 5^n$. Ciąg $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ jest:

a)zbieżny, b) geometryczny, c)ograniczony.

Zad.45 . Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 + 10n + 1$.Wobec tego:

a) pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 12;
b) trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy 40;
c) wszystkie wyrazy ciągu są liczbami dodatnimi.

Zad.46 . Wykresem ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 2n + 1$ jest:

a) prosta, b) półprosta, c)zbiór punktów leżących na jednej prostej.

Zad.47 . Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -\frac{9}{n}$. Wobec tego:

a) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami ujemnymi,
b) dokładnie dwa wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi,
c) wszystkie wyrazy ciągu są liczbami wymiernymi.

Zad.48 . Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) określone są wzorami $a_n = n^3 + n^2, b_n = n^3 + 10000$, to

a) $a_k < b_k$ dla każdego $k \in N_+$,

b) $a_k < b_k$ dla każdej liczby naturalnej k większej od 100,

c) $a_k = b_k$ dla dokładnie jednej liczby naturalnej k.

Zad.49 . O ciągu (a_n) wiadomo, że dla każdego n>1 zachodzi nierówność $a_{n-1}\cdot a_n < 0$. Wobec tego:

a) $a_{n-1}\cdot a_{n+1} > 0$ dla każdego n>1,

b) jeśli $a_1 < 0$,to $a_{100} > 0$,

c)jeśli $a_1 > 0$, to $a_{111} > 0$.

Zad.50 . Liczba wszystkich trzywyrazowych ciągów ze zbioru {!,?} jest równa:

a) 2; b) 8; c) 9.

Zad.51 **.** Ciąg (a_n) jest rosnący. Wynika stąd, że ciągiem rosnącym jest też ciąg (b_n) dany wzorem:

a) $b_n = n \cdot a_n$, b) $b_n = (\mathrm{a}_n)^2$, c) $b_n = 5 \cdot a_n$.

Zad.52 **.** Wszystkie wyrazy rosnącego ciągu (a_n) są różne od zera. Wynika stąd, że:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dla każdego $n \in N_+$,

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ dla każdego $n \in N_+$,

c) istnieje co najwyżej jedna taka liczba $n \in N_+$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$.

Zad.53 **.** (a_n) jest ciągiem arytmetycznym , w którym $a_1 = 1000, a_{1000} = 999$. Zatem:

a) wszystkie wyrazi ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi,

b) prawie wszystkie wyrazi ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi,

c) prawie wszystkie wyrazi ciągu (a_n) są liczbami ujemnymi.

Zad.54 **.** Jeśli (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi, to również ciągiem arytmetycznym jest ciąg (c_n), gdzie:

a) $c_n = a_n + b_n$, b) $c_n = a_n - b_n$, c) $c_n = a_n \cdot b_n$.

Zad.55 **.** Rozważmy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q.

a) jeśli q>1 to ciąg jest rosnący, b) jeśli $a_1 < 0$ i $q \in (0;1)$, to ciąg jest rosnący, c) jeśli $a_1 < 0$ i q>1 , to ciąg jest malejący.

Zad.56 **.** Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego i $abcd \neq 0$. Wynika stąd, że :

a) $c^2 = bd$, b) $\frac{d}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$, c) $ad = bc$.

Zad.57 **.** Dany jest ciąg (a_n). Które ze zdań jest prawdziwe:

a) jeśli (a_n) jest zbieżny to jest ograniczony,

b) jeśli (a_n) jest ograniczony i rosnący to jest zbieżny,

c) jeśli (a_n) jest ograniczony z dołu i malejący, to jest zbieżny.